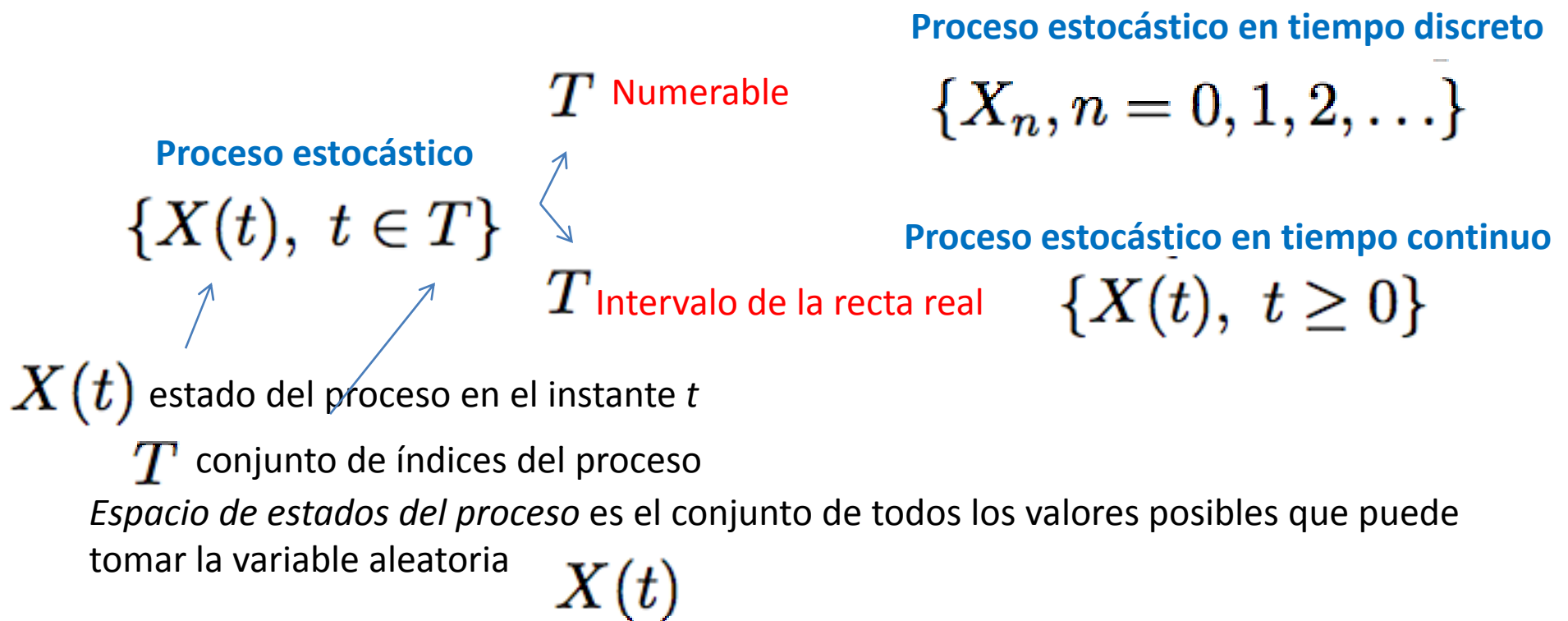


CADENAS DE MARKOV EN TIEMPO DISCRETO

PROCESOS ESTOCÁSTICOS Y DE MARKOV

- Un ***fenómeno aleatorio*** es un fenómeno empírico que obedece a leyes probabilísticas en lugar de determinísticas.
- Un ***proceso estocástico*** es un fenómeno aleatorio que surge en un proceso que se desarrolla en el tiempo de una manera controlada por medio de leyes probabilísticas.
- Así, un ***proceso estocástico*** es una familia de variables aleatorias que proporcionan una descripción de la evolución de un determinado fenómeno físico a través del tiempo.



Clasificación de Procesos Estocásticos:

Tiempo discreto y espacio de estados discreto.

Jugador con 3 euros y en cada jugada puede ganar o perder 1 euro con probabilidad p y $1-p$. Deja de jugar cuando tenga 0 o 6 euros.

Tiempo discreto y espacio de estados continuo.

Cantidad de agua almacenada en un pantano

Tiempo continuo y espacio de estados discreto.

Número de ordenadores ocupados en un centro de cálculo

Tiempo continuo y espacio de estados continuo.

Cantidad de agua almacenada en un pantano

La Teoría de la Probabilidad se ha centrado fundamentalmente en el estudio de la **independencia** y sus consecuencias

$$P(X_n \in A_n, X_{n-1} \in A_{n-1}, \dots, X_0 \in A_0) \\ = P(X_n \in A_n) P(X_{n-1} \in A_{n-1}) \cdots P(X_0 \in A_0)$$

Un **Proceso de Markov** es un proceso estocástico que verifica

$$P(X_{n+1} \in A_{n+1} \mid X_n \in A_n, \dots, X_0 \in A_0) = P(X_{n+1} \in A_{n+1} \mid X_n \in A_n)$$

Interpretación de un Proceso de Markov:

$$\underbrace{P(X_{n+1} \in A_{n+1}, \dots, X_{n+m} \in A_{n+m})}_{\text{Futuro}} \mid \underbrace{X_n \in A_n}_{\text{Presente}}, \underbrace{\dots, X_0 \in A_0}_{\text{Pasado}} \\ = P(\underbrace{X_{n+1} \in A_{n+1}, \dots, X_{n+m} \in A_{n+m}}_{\text{Futuro}} \mid \underbrace{X_n \in A_n}_{\text{Presente}}), \quad \forall n, m.$$

Las predicciones del futuro del proceso, una vez conocido el estado actual, no pueden mejorar con conocimiento adicional del pasado.

Cadena es un proceso estocástico con espacio de estados discreto.

Cadena en tiempo discreto es un proceso estocástico en tiempo discreto con espacio de estados discreto

Cadena en tiempo continuo un proceso estocástico en tiempo continuo con espacio de estados discreto

CADENAS DE MARKOV EN TIEMPO DISCRETO

Un proceso estocástico $\{X_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ es una cadena de Markov en tiempo discreto (CMTD) si para cada n y $x_j \in S, j = 0, \dots, n + 1$, se verifica

$$P(X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_n = x_n, \dots, X_0 = x_0) = P(X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_n = x_n).$$

La probabilidad condicional

$$p_{x_n x_{n+1}}(n) = P(X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_n = x_n), \quad x_n, x_{n+1} \in S$$

se denomina probabilidad de transición en un paso del estado x_n al x_{n+1} en el instante $n + 1$.

Sin pérdida de generalidad y para simplificar la notación, escribiremos la probabilidad de transición en un paso del estado i al estado j en el instante $n + 1$ como

$$p_{ij}(n) = P(X_{n+1} = j \mid X_n = i), \quad i, j \in S.$$

La CMTD se denomina homogénea si $p_{ij}(n)$ no depende de n , es decir,

$$P(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = P(X_{n+m+1} = j \mid X_{n+m} = i)$$

En tales casos escribiremos p_{ij} en lugar de $p_{ij}(n)$.

La matriz formada por las probabilidades de transición en un paso se denomina matriz de transición o matriz de probabilidades de transición y toma la forma

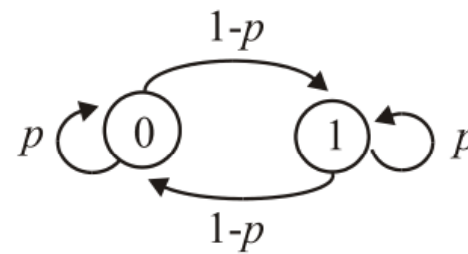
$$\mathbf{P} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & \dots \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \end{matrix} & \left(\begin{array}{cccc} p_{00} & p_{01} & p_{02} & \dots \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & \dots \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array} \right) \end{matrix}.$$

\mathbf{P} es una matriz cuadrada no negativa cuyas filas suman la unidad, es decir, $0 \leq p_{ij} \leq 1$ y $\sum_j p_{ij} = 1$ para cada $i \in S$. Por lo tanto, \mathbf{P} es una matriz estocástica.

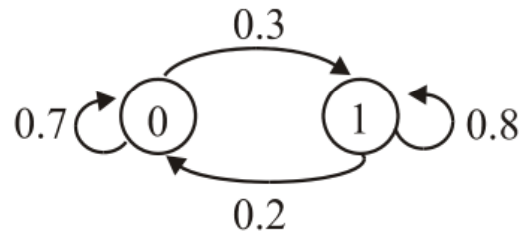
Gráficamente, una CMTD con espacio de estados finito se puede representar mediante un diagrama de transición, es decir, mediante un grafo dirigido finito, donde cada nodo representa un estado de la cadena, los arcos representan las posibles transiciones entre estados y sobre los arcos se indican las probabilidades de transición entre los estados representados por los nodos unidos por cada arco.

Ejemplo (Sistema de comunicaciones) Consideremos un sistema de comunicaciones que transmite dígitos 0 y 1. Cada dígito debe pasar por varias fases, en cada una de las cuales hay una probabilidad p de que el dígito que entra coincida con el que sale. Las fases son independientes entre sí.

$$p_{ij} = \begin{cases} p, & \text{si } i = j \\ 1 - p, & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{pmatrix}$$



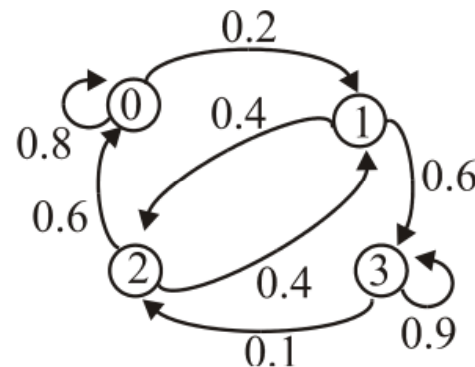
Ejemplo (Fiabilidad de un sistema) Se sabe que un sistema fallará o no dependiendo de si ha fallado o no el día anterior. La probabilidad de que falle un día sabiendo que ha fallado el día anterior es de 0.7, pero si no ha fallado el día anterior es de 0.2.



$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$$

Ejemplo (Transformando un proceso en una cadena de Markov) Consideremos de nuevo el Ejemplo 7.2 en el que ahora suponemos que el estado en el que se encuentra el sistema un día depende de lo que ha ocurrido los dos días anteriores. Concretamente, supongamos que si falló ayer y falla hoy, fallará mañana con probabilidad 0.8; si está fallando hoy pero no ayer, entonces fallará mañana con probabilidad 0.6; si falló ayer pero no hoy, entonces fallará mañana con probabilidad 0.4; si no ha fallado ni hoy ni ayer, entonces fallará mañana con probabilidad 0.1.

- 0 = falló ayer y hoy,
- 1 = falló ayer pero no hoy,
- 2 = no falló ayer pero sí hoy,
- 3 = no falló ni ayer ni hoy.



$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,4 & 0,6 \\ 0,6 & 0,4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,1 & 0,9 \end{pmatrix}$$

La distribución de probabilidad de X_0 , $\pi^0 = (\pi_0^0, \pi_1^0, \pi_2^0, \dots)$ con $\pi_i^0 = P(X_0 = i)$, se denomina distribución de probabilidad inicial.

Una cadena de Markov queda determinada si se conocen las probabilidades de transición, p_{ij} , y la distribución de probabilidad inicial, π^0 .

$$\begin{aligned} & P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_n = i_n) \\ &= P(X_n = i_n \mid X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) \cdots P(X_1 = i_1 \mid X_0 = i_0) P(X_0 = i_0) \\ &= P(X_n = i_n \mid X_{n-1} = i_{n-1}) \cdots P(X_1 = i_1 \mid X_0 = i_0) P(X_0 = i_0) \\ &= p_{i_{n-1}i_n} p_{i_{n-2}i_{n-1}} \cdots p_{i_0i_1} \pi_{i_0}^0. \end{aligned}$$

COMPORTAMIENTO DE TRANSICIÓN

Comencemos esta sección estudiando los tiempos de permanencia de la cadena en cada estado. Supongamos que la cadena está en el estado i . Entonces, permanecerá en el estado i en el próximo paso con probabilidad p_{ii} y dejará el estado i con probabilidad $1 - p_{ii}$. Por lo tanto, la probabilidad de que la cadena permanezca en el estado i exactamente m pasos, supuesto que hemos comenzado en ese estado, es $p_{ii}^m (1 - p_{ii})$, es decir, el tiempo de permanencia en el estado i se distribuye geométricamente.

Las probabilidades de transición del estado i al estado j en n pasos se denominan probabilidades de transición en n pasos y se denotan como

$$p_{ij}^{(n)} = P(X_n = j \mid X_0 = i) = P(X_{n+m} = j \mid X_m = i)$$

de tal forma que $p_{ij}^{(1)} = p_{ij}$.

ecuaciones de Chapman-Kolmogorov,

$$\begin{aligned} p_{ij}^{(n+m)} &= P(X_{n+m} = j \mid X_0 = i) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X_{n+m} = j, X_n = k \mid X_0 = i) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} P(X_{n+m} = j \mid X_n = k, X_0 = i) P(X_n = k \mid X_0 = i) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} P(X_{n+m} = j \mid X_n = k) P(X_n = k \mid X_0 = i) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} p_{kj}^{(m)} p_{ik}^{(n)} = \sum_{k=0}^{\infty} p_{ik}^{(n)} p_{kj}^{(m)}. \end{aligned}$$

Si denotamos con $\mathbf{P}^{(n)}$ la *matriz de transición en n pasos*, lo que nos están diciendo las ecuaciones de Chapman-Kolmogorov es que

$$\mathbf{P}^{(n+m)} = \mathbf{P}^{(n)} \mathbf{P}^{(m)}.$$

Por lo tanto,

$$\mathbf{P}^{(2)} = \mathbf{P}^{(1)} \mathbf{P}^{(1)} = \mathbf{P} \mathbf{P}$$

$$\mathbf{P}^{(3)} = \mathbf{P}^{(2)} \mathbf{P} = \mathbf{P}^3$$

:

Una vez conocidas las probabilidades de transición en n pasos calculemos la *distribución marginal del paso n -ésimo*

$$P(X_n = j) = \sum_i P(X_n = j \mid X_0 = i) P(X_0 = i) = \sum_i p_{ij}^{(n)} \pi_i^0.$$

Si $\boldsymbol{\pi}^n = (\pi_0^n, \pi_1^n, \pi_2^n, \dots)$, con $\pi_i^n = P(X_n = i)$, designa la distribución de probabilidad en n pasos, la forma matricial de la expresión anterior es

$$\boldsymbol{\pi}^n = \boldsymbol{\pi}^0 \mathbf{P}^n.$$

Ejemplo 7.4 (Continuación del ejemplo de Fiabilidad de un sistema)

1. ¿Cuál es la probabilidad de que el sistema falle dentro de cuatro días sabiendo que hoy no ha fallado?
2. ¿Cuál es la probabilidad de que el sistema falle el cuarto día sabiendo que inicialmente la probabilidad de fallar es de 0.4 y la de no fallar es de 0.6, es decir, sabiendo que la distribución inicial es $\pi^0 = (0,4, 0,6)$?

$$p_{10}^{(4)} = P(X_4 = 0 \mid X_0 = 1)$$
$$\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,55 & 0,45 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}$$
$$\mathbf{P}^4 = \mathbf{P}^2\mathbf{P}^2 = \begin{pmatrix} 0,55 & 0,45 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,55 & 0,45 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,4375 & 0,5625 \\ \mathbf{0,375} & 0,625 \end{pmatrix}$$
$$p_{10}^{(4)} = P(X_4 = 0 \mid X_0 = 1) = 0,375$$

$$P(X_4 = 0) = \sum_{i=0}^1 p_{i0}^{(4)} \pi_i^0 = 0,4375 \times 0,4 + 0,375 \times 0,6 = 0,4$$

$$\begin{aligned} \pi^1 &= \pi^0 \mathbf{P} = (0,4, 0,6) \\ \pi^2 &= \pi^0 \mathbf{P}^2 = \pi^1 \mathbf{P} = (0,4, 0,6) \\ \pi^3 &= \pi^0 \mathbf{P}^3 = \pi^2 \mathbf{P} = (0,4, 0,6) \\ \pi^4 &= \pi^0 \mathbf{P}^4 = \pi^3 \mathbf{P} = (\mathbf{0,4}, 0,6) \end{aligned} \quad \pi^4 = \pi^0 \mathbf{P}^4 = (0,4, 0,6) \begin{pmatrix} 0,4375 & 0,5625 \\ 0,375 & 0,625 \end{pmatrix} = (0,4, 0,6)$$

$$P(X_4 = 0) = \pi_0^4 = 0,4$$

Estado esperado en el instante n suponiendo que se parte del estado i :

$$E(X_n | X_0 = i) = \sum_{j=0}^{\infty} jP(X_n = j | X_0 = i) = \sum_{j=0}^{\infty} jp_{ij}^{(n)}$$

Estado esperado en el instante n :

$$E(X_n) = \sum_{j=0}^{\infty} jP(X_n = j) = \sum_{j=0}^{\infty} j \sum_i p_{ij}^{(n)} \pi_i^0$$

Ejemplo (Continuación del ejemplo de Fiabilidad de un sistema)

1. ¿Cuál es el estado esperado dentro de cuatro días sabiendo que hoy no ha fallado?
2. ¿Cuál es el estado esperado para el cuarto día sabiendo que la distribución de probabilidad inicial es $\pi^0 = (0,4,0,6)$?

$$E(X_4 | X_0 = 1) = \sum_{j=0}^1 jp_{1j}^{(4)} = 0 \times 0,375 + 1 \times 0,625 = 0,625$$

$$E(X_4) = \sum_{j=0}^1 j \sum_i p_{ij}^{(4)} \pi_i^0 = 0 \times 0,4 + 1 \times 0,6 = 0,6$$

Si queremos realizar el cálculo de la matriz \mathbf{P}^n de forma eficiente,

$$\mathbf{P} = \mathbf{H}\mathbf{D}\mathbf{H}^{-1} \longrightarrow \mathbf{P}^n = \mathbf{H}\mathbf{D}^n\mathbf{H}^{-1}$$

\mathbf{H} matriz de autovectores

\mathbf{D} matriz diagonal de autovalores

$$(\mathbf{P} - \lambda\mathbf{I}) \mathbf{x} = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_s \end{pmatrix}$$

$$|\mathbf{P} - \lambda\mathbf{I}| = 0$$

COMPORTAMIENTO ESTACIONARIO

Ejemplo (Continuación del ejemplo de Fiabilidad de un sistema)

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix} \longrightarrow \mathbf{P}^2 = \begin{pmatrix} 0,55 & 0,45 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix} \longrightarrow \mathbf{P}^4 = \begin{pmatrix} 0,4375 & 0,5625 \\ 0,375 & 0,625 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\mathbf{P}^8 = \begin{pmatrix} 0,40234 & 0,59766 \\ 0,39844 & 0,60156 \end{pmatrix} \longrightarrow \mathbf{P}^{16} = \begin{pmatrix} 0,40001 & 0,59999 \\ 0,39999 & 0,60001 \end{pmatrix} \longrightarrow \mathbf{P}^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\pi}^n = \boldsymbol{\pi}^0 \mathbf{P}^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \boldsymbol{\pi} = (\pi_0, \pi_1, \dots)$$

Ejemplo Consideremos la CMTD con matriz de transición

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{P}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{P}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{P}^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{P}^5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{P}^n \text{ no tiene límite}$$

Ejemplo 7.9 Consideremos la CMTD con matriz de transición

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P}^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \pi^0 = (1, 0, 0, 0) \Rightarrow \pi^n = \pi^0 \mathbf{P}^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \pi = (1/2, 1/2, 0, 0) \\ \pi^0 = (0, 0, 0, 1) \Rightarrow \pi^n = \pi^0 \mathbf{P}^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \pi = (0, 0, 1/2, 1/2) \end{array}$$

Clasificación de estados

el estado j es accesible desde el estado i $i \rightarrow j$ si $p_{ij}^{(n)} > 0$ para algún $n \geq 0$.

Dos estados i y j comunican, denotado como $i \leftrightarrow j$, si son accesibles entre sí.

Si, por definición, denotamos

$$\begin{aligned} p_{ii}^{(0)} &= P(X_0 = i \mid X_0 = i) = 1, \\ p_{ij}^{(0)} &= P(X_0 = j \mid X_0 = i) = 0, \text{ si } i \neq j \end{aligned}$$

Proposición 7.1 *La relación de comunicación es una relación de equivalencia, es decir, verifica las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva.*

Demostración. La relación de comunicación, \leftrightarrow , es:

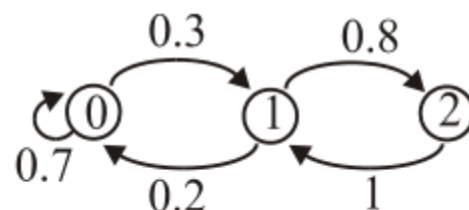
- i) reflexiva, ya que $i \leftrightarrow i, \forall i$, al ser $p_{ii}^{(0)} = 1 > 0$;
- ii) simétrica, ya que si $i \leftrightarrow j \Leftrightarrow \exists n, m$ tal que $p_{ij}^{(n)} > 0$ y $p_{ji}^{(m)} > 0 \Leftrightarrow j \leftrightarrow i$;
- iii) transitiva, ya que si $i \leftrightarrow j$ ($\exists n, m$ tal que $p_{ij}^{(n)} > 0$ y $p_{ji}^{(m)} > 0$) y $j \leftrightarrow k$ ($\exists n', m'$ tal que $p_{jk}^{(n')} > 0$ y $p_{kj}^{(m')} > 0$) $\Rightarrow i \leftrightarrow k$ pues $\exists n + n', m + m'$ tal que $p_{ik}^{(n+n')} = \sum_{r=0}^{\infty} p_{ir}^{(n)} p_{rk}^{(n')} \geq p_{ij}^{(n)} p_{jk}^{(n')} > 0$ y $p_{ki}^{(m+m')} = \sum_{r=0}^{\infty} p_{kr}^{(m')} p_{ri}^{(m)} \geq p_{kj}^{(m')} p_{ji}^{(m)} > 0$. \triangle

Por lo tanto, podemos considerar clases de equivalencia con respecto a la relación de comunicación: dos estados que comunican están en una misma clase de comunicación.

Si todos los estados de una cadena de Markov comunican entre sí, es decir, si la cadena consta de una sola clase de equivalencia, se dice que es irreducible.

Ejemplo La cadena de Markov con matriz y diagrama de transición

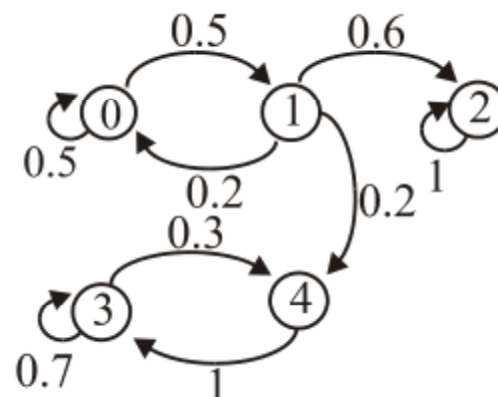
$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 & 0 \\ 0,2 & 0 & 0,8 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



es irreducible

Ejemplo 7.11 La cadena de Markov con matriz y diagrama de transición

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0,2 & 0 & 0,6 & 0 & 0,2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,7 & 0,3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



no es irreducible, al tener tres clases de equivalencia: $\{0, 1\}$, $\{2\}$ y $\{3, 4\}$.

Para un estado i , sea f_i la probabilidad de que comenzando en el estado i , el proceso vuelva a entrar alguna vez en él. Entonces, el estado i es recurrente si $f_i = 1$ y es transitorio si $f_i < 1$.

Proposición *El estado i es recurrente si y sólo si $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$ y transitorio si y sólo si $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} < \infty$.*

Corolario *El estado i es recurrente si y sólo si comenzando en el estado i , el número esperado de instantes que la cadena está en i es infinito.*

Definamos

$$A_n = \begin{cases} 1, & \text{si } X_n = i \\ 0, & \text{si } X_n \neq i \end{cases}$$

Entonces, el número de instantes que la cadena está en el estado i es $\sum_{n=0}^{\infty} A_n$ y el número esperado de instantes que la cadena está en i es

$$\begin{aligned} E \left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n \mid X_0 = i \right) &= \sum_{n=0}^{\infty} E(A_n \mid X_0 = i) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X_n = i \mid X_0 = i) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)}. \end{aligned}$$

Corolario *El estado i es transitorio si y sólo si comenzando en el estado i , el número esperado de instantes que la cadena está en i es finito.*

Corolario *En una cadena de Markov con espacio de estados finito no todos los estados pueden ser transitorios.*

Corolario *Si el estado i es recurrente y j comunica con i , entonces j es recurrente, es decir, la recurrencia es una propiedad de clase.*

Demostración. Si i es recurrente $\sum_{k=1}^{\infty} p_{ii}^{(k)} = \infty$ y como j comunica con i , entonces $\exists n, m$ tales que $p_{ji}^{(n)} > 0$ y $p_{ij}^{(m)} > 0$. Además, $p_{jj}^{(n+k+m)} \geq p_{ji}^{(n)} p_{ii}^{(k)} p_{ij}^{(m)}, \forall k$. Por lo tanto,

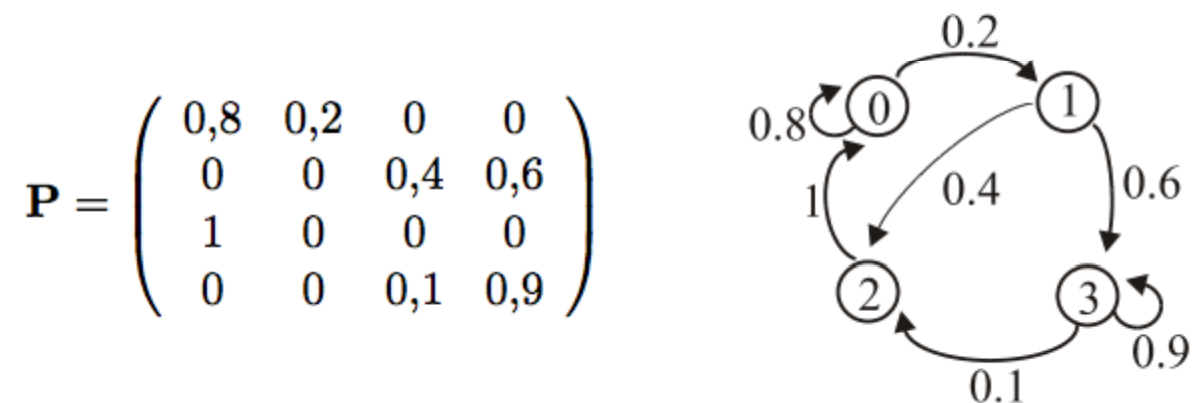
$$\sum_{k=1}^{\infty} p_{jj}^{(k)} \geq \sum_{k=1}^{\infty} p_{jj}^{(n+k+m)} \geq p_{ji}^{(n)} p_{ij}^{(m)} \sum_{k=1}^{\infty} p_{ii}^{(k)} = \infty,$$

por lo que j es recurrente. △

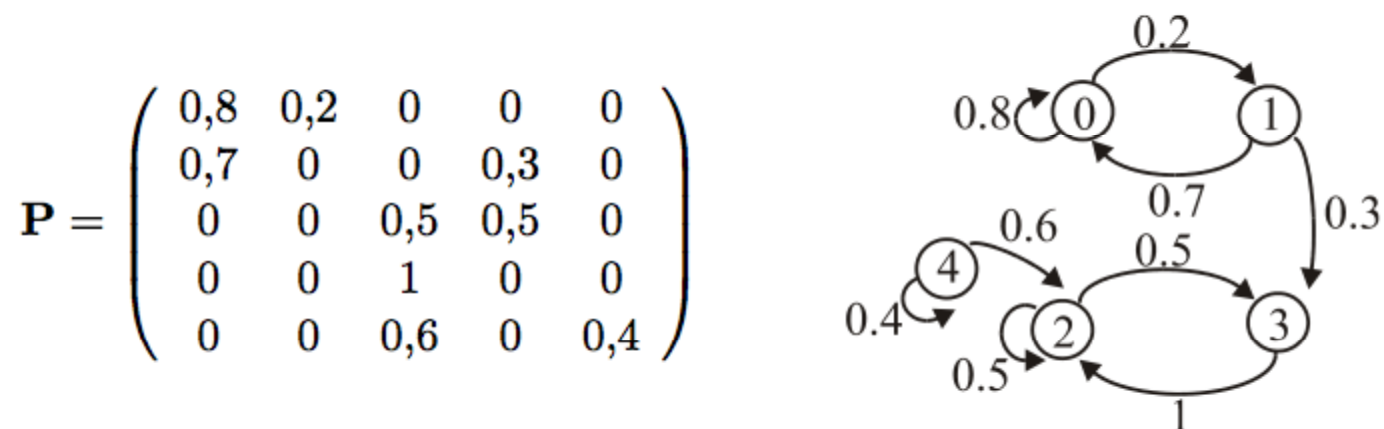
Corolario *Si el estado i es transitorio y j comunica con i , entonces j es transitorio, es decir, ser transitorio es una propiedad de clase.*

Corolario *Todos los estados de una CMTD irreducible finita son recurrentes.*

Ejemplo Consideremos la CMTD con matriz y diagrama de transición



Ejemplo Consideremos la CMTD con matriz y diagrama de transición



Un estado recurrente i se dice que es recurrente positivo si comenzando en i , el tiempo esperado hasta que la cadena vuelva al estado i es finito. Por el contrario, si el tiempo esperado hasta que la cadena vuelva al estado i es infinito, se dice que es recurrente nulo.

Proposición *Si el estado i es recurrente positivo y j comunica con i , entonces j es recurrente positivo, es decir, la recurrencia positiva es una propiedad de clase.*

Demostración. Si i es recurrente positivo entonces $\sum_{k=1}^{\infty} k p_{ii}^{(k)} < \infty$ y si j comunica con i entonces $\exists n, m$ tales que $p_{ji}^{(n)} > 0$ y $p_{ij}^{(m)} > 0$. Además, $p_{jj}^{(n+k+m)} \geq p_{ji}^{(n)} p_{ii}^{(k)} p_{ij}^{(m)}, \forall k$. Por lo tanto,

$$\infty > \sum_{k=1}^{\infty} k p_{ii}^{(k)} \geq \sum_{k=1}^{\infty} (n+k+m) p_{ii}^{(n+k+m)} \geq p_{ji}^{(n)} p_{ij}^{(m)} \sum_{k=1}^{\infty} k p_{jj}^{(k)},$$

por lo que j es recurrente positivo. \triangle

Corolario *En una cadena de Markov con espacio de estados finito, todos los estados recurrentes son recurrentes positivos.*

Corolario *Todos los estados de una cadena de Markov irreducible pertenecen a la misma clase, es decir, o bien todos son de transición, o todos son recurrentes nulos o todos son recurrentes positivos. En particular, si la cadena de Markov es finita todos los estados son recurrentes positivos.*

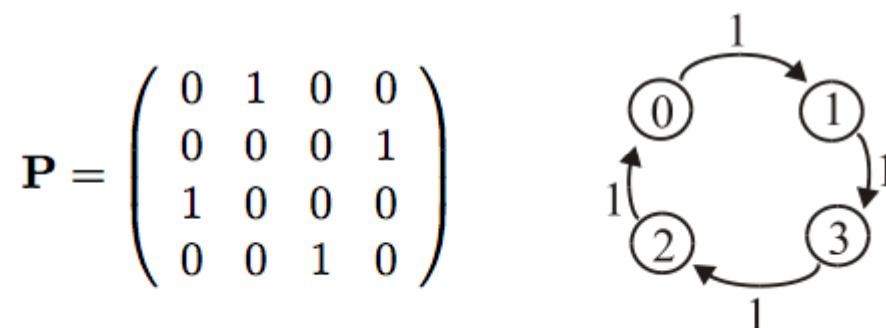
El estado i tiene periodo d si $p_{ii}^{(n)} = 0$ cuando n no es divisible por d y d es el mayor entero con esa propiedad, es decir, d es el máximo común divisor del conjunto

$$\{n \geq 0 : p_{ii}^{(n)} > 0\}.$$

Un estado con periodo 1 se dice aperiódico. Es decir, el periodo de un estado i de una cadena de Markov es el máximo común divisor del número de pasos necesarios para volver al estado i supuesto que se ha partido de él.

Proposición *Si el estado i tiene periodo d y j comunica con i , entonces j tiene periodo d , es decir, la periodicidad es una propiedad de clase.*

Ejemplo Consideremos la CMTD con matriz y diagrama de transición



El estado i es absorbente si y sólo si ningún otro estado de la cadena es accesible desde él, es decir, si $p_{ii} = 1$. El estado i es ergódico si es aperiódico y recurrente positivo. Las cadenas de Markov que tienen todos los estados ergódicos se denominan ergódicas.

Teoremas Límite

El vector de probabilidades $\boldsymbol{\pi} = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \dots)$ de una CMTD se dice estacionario si cualquier transición de la cadena de acuerdo con la matriz \mathbf{P} no tiene efecto sobre esas probabilidades, es decir, se verifica

$$\pi_j = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i p_{ij}, j \geq 0$$
$$\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j = 1$$

$$\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi} \mathbf{P},$$
$$\boldsymbol{\pi} \mathbf{1}^T = 1.$$

Ejemplo (Continuación del ejemplo de Sistema de comunicaciones) Consideremos el Ejemplo

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}.$$

Entonces, el vector de probabilidad estacionario se obtiene resolviendo

$$\begin{aligned}\pi_0 &= 0,7\pi_0 + 0,3\pi_1 \\ \pi_1 &= 0,3\pi_0 + 0,7\pi_1 \\ \pi_0 + \pi_1 &= 1\end{aligned}$$

cuya solución es $\boldsymbol{\pi} = (\pi_0, \pi_1) = (0,5, 0,5)$. □

El vector de probabilidades $\tilde{\boldsymbol{\pi}} = (\tilde{\pi}_0, \tilde{\pi}_1, \tilde{\pi}_2, \dots)$ de una CMTD se dice límite si

$$\tilde{\boldsymbol{\pi}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \boldsymbol{\pi}^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \boldsymbol{\pi}^0 \mathbf{P}^n = \boldsymbol{\pi}^0 \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}^n = \boldsymbol{\pi}^0 \tilde{\mathbf{P}}.$$

El vector de probabilidades $\tilde{\boldsymbol{\pi}} = (\tilde{\pi}_0, \tilde{\pi}_1, \tilde{\pi}_2, \dots)$ de una CMTD se dice el único vector de probabilidades de equilibrio de la cadena si \mathbf{P}^n y $\boldsymbol{\pi}^n$ convergen a $\tilde{\mathbf{P}}$ y $\tilde{\boldsymbol{\pi}}$, respectivamente, independientemente de la distribución inicial $\boldsymbol{\pi}^0$, cada $\tilde{\pi}_i > 0, \forall i \in S$ y $\sum_{i=0}^{\infty} \tilde{\pi}_i = 1$.

Ejemplo
caciones)

(Continuación del ejemplo de Sistema de comuni-

$$\tilde{\mathbf{P}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}.$$

$$\tilde{\mathbf{P}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}^n = \begin{pmatrix} \tilde{\pi}_0 & \tilde{\pi}_1 & \tilde{\pi}_2 & \cdots \\ \tilde{\pi}_0 & \tilde{\pi}_1 & \tilde{\pi}_2 & \cdots \\ \tilde{\pi}_0 & \tilde{\pi}_1 & \tilde{\pi}_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\pi} = \lim_{n \rightarrow \infty} \pi^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \pi^{n-1} \mathbf{P} = \tilde{\pi} \mathbf{P}$$

Ejemplo Consideremos la CMTD con matriz y diagrama de transición

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} 1 \curvearrowright \textcircled{0} \\ \textcircled{1} \curvearrowleft 1 \end{array}$$

- Existe un número infinito de vectores de probabilidades estacionarios
- \mathbf{P}^n tiene límite

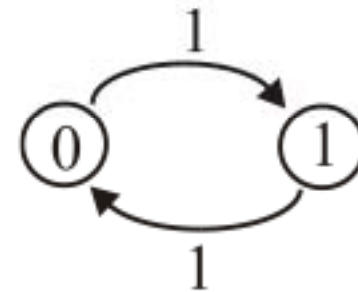
$$\tilde{\mathbf{P}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y las probabilidades límite $\tilde{\pi}$ existen y son idénticas a la distribución inicial $\tilde{\pi} = \pi^0 \tilde{\mathbf{P}} = \pi^0$.

- No existe un único vector de probabilidades de equilibrio.

Ejemplo

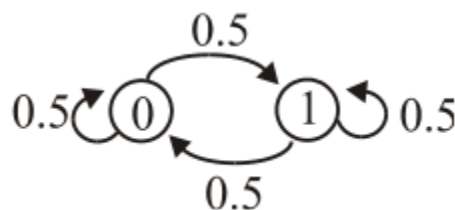
$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$



- Existe un único vector de probabilidades estacionario $\pi = (0,5, 0,5)$
- P^n no tiene límite. Por lo tanto, las probabilidades límite $\tilde{\pi}$ no existen.
- En consecuencia, no existe un único vector de probabilidades de equilibrio. \square

Ejemplo Consideremos la CMTD con matriz y diagrama de transición

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$$



- Existe un único vector de probabilidades estacionario $\pi = (0,5, 0,5)$
- \mathbf{P}^n tiene límite

$$\tilde{\mathbf{P}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}^n = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}.$$

$\tilde{\pi}$ existe y es independiente de la distribución inicial

$$\tilde{\pi} = \pi^0 \tilde{\mathbf{P}} = (0,5, 0,5).$$

- Existe un único vector de probabilidades de equilibrio y coincide con el estacionario, $\tilde{\pi} = \pi = (0,5, 0,5)$. \square

Ejemplo Consideremos la CMTD con matriz y diagrama de transición

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```

graph LR
    Start(( )) --> 0((0))
    0 -- 1 --> 1((1))
    1 -- 1 --> 1
    style Start fill:none,stroke:none
  
```

- Existe un único vector de probabilidades estacionario $\pi = (0, 1)$
- \mathbf{P}^n tiene límite

$$\tilde{\mathbf{P}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}^n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y las probabilidades límites $\tilde{\pi}$ existen, son independientes de la distribución inicial y son idénticas a la única distribución estacionaria

$$\tilde{\pi} = \pi = (0, 1).$$

- Por último, no existe un único vector de probabilidades de equilibrio. Los elementos del vector de probabilidades estacionario no son estrictamente positivos. \square

Teorema Si \mathbf{P} es la matriz de transición de una cadena de Markov finita, irreducible y aperiódica, existe una única distribución de probabilidad de equilibrio, es decir, existe una única distribución que satisface

$$\begin{aligned}\pi &= \pi \mathbf{P} \\ \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j &= 1\end{aligned}$$

Además, para cualquier distribución inicial π^0 , se tiene

$$\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} \pi^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \pi^0 \mathbf{P}^n,$$

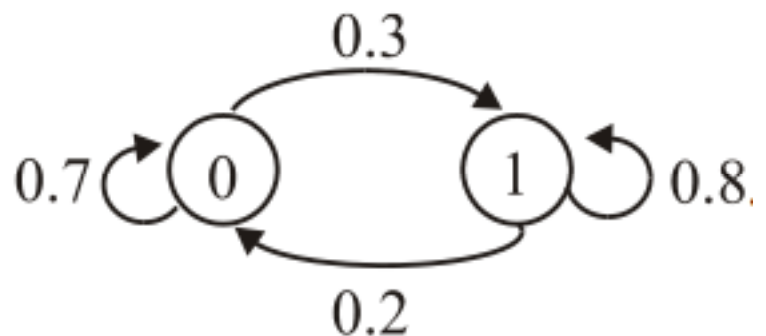
con $\pi_i > 0, \forall i$.

Teorema Para una cadena de Markov ergódica e irreducible existe $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)}$ y es independiente de i . Además, haciendo $\pi_j = \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)}, j \geq 0$, entonces π_j es la única solución no negativa de

$$\begin{aligned}\pi_j &= \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i p_{ij}, \quad j \geq 0 \\ \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j &= 1\end{aligned}$$

Ejemplo

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$$



La cadena es finita, irreducible y aperiódica. Por lo tanto, existe la distribución de equilibrio $\boldsymbol{\pi} = (\pi_0, \pi_1) = (0,4, 0,6)$, que es la solución del sistema

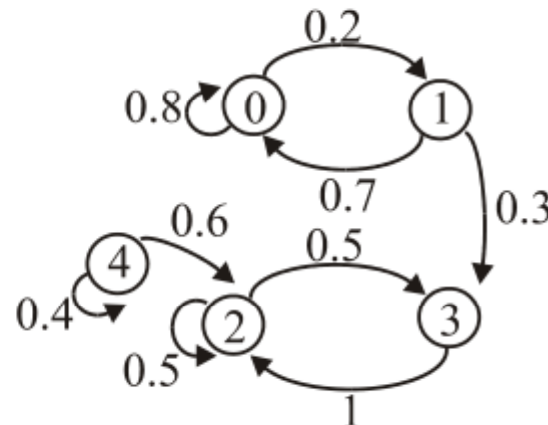
$$\begin{matrix} (\pi_0, \pi_1) = (\pi_0, \pi_1) \mathbf{P} \\ \pi_0 + \pi_1 = 1 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \pi_0 = 0,7\pi_0 + 0,2\pi_1 \\ \pi_1 = 0,3\pi_0 + 0,8\pi_1 \\ \pi_0 + \pi_1 = 1 \end{cases}$$

Ahora veremos qué ocurre cuando algunas de las condiciones de los teoremas anteriores no se verifican, es decir, cuando las cadenas no son irreducibles y aperiódicas.

En primer lugar, supongamos que \mathbf{P} es reducible con clases recurrentes R_1, R_2, \dots, R_r y clases de transición T_1, T_2, \dots, T_t . Cada clase recurrente se comporta como una subcadena de Markov.

Ejemplo

$$P = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 & 0 & 0 & 0 \\ 0,7 & 0 & 0 & 0,3 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,6 & 0 & 0,4 \end{pmatrix}$$



$$\mathbf{P}' = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

y $(\pi_2, \pi_3) = (2/3, 1/3)$ es la solución de

$$\begin{aligned} (\pi_2, \pi_3) &= (\pi_2, \pi_3) \mathbf{P}' \\ \pi_2 + \pi_3 &= 1 \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{cases} \pi_2 = 0,5\pi_2 + \pi_3 \\ \pi_3 = 0,5\pi_2 \\ \pi_2 + \pi_3 = 1 \end{cases}$$

Supongamos ahora que \mathbf{P} es irreducible, pero tiene periodo $d > 1$.

Proposición Sea $\{X_n : n = 0, 1, 2, \dots\}$ una cadena de Markov irreducible, recurrente positiva y periódica con periodo $d > 1$. Entonces, existe solución única no negativa π_j del sistema

$$\pi_j = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i p_{ij}, \quad j \geq 0$$
$$\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j = 1$$

y para cualquier distribución inicial π^0

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{d} \left(\pi^0 \mathbf{P}^{n+1} + \dots + \pi^0 \mathbf{P}^{n+d} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{d} \left(\pi^{n+1} + \dots + \pi^{n+d} \right) = \pi.$$

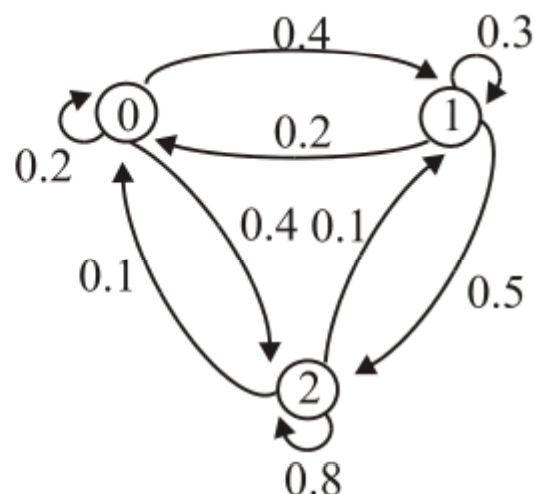
π_j representa la fracción de tiempo a largo plazo que la cadena está en el estado j .

m_i es el número esperado de pasos hasta volver a i

$$m_i = \frac{1}{\pi_i}$$

Ejemplo Consideremos la CMTD con matriz y diagrama de transición

$$P = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,4 & 0,4 \\ 0,2 & 0,3 & 0,5 \\ 0,1 & 0,1 & 0,8 \end{pmatrix}$$



y nos preguntamos

1. ¿Cuál es la proporción de tiempo, a largo plazo, que la cadena está en cada uno de los estados?
2. ¿Cuál es el número medio de iteraciones para que la cadena vuelva al estado i supuesto que ha partido del estado i ?

$$\pi_0 = 0,2\pi_0 + 0,2\pi_1 + 0,1\pi_2$$

$$\pi_1 = 0,4\pi_0 + 0,3\pi_1 + 0,1\pi_2$$

$$\pi_2 = 0,4\pi_0 + 0,5\pi_1 + 0,8\pi_2$$

$$\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1$$

$$\boldsymbol{\pi} = (\pi_0, \pi_1, \pi_2) = (3/23, 12/69, 48/69)$$

$$m_0 = 1/\pi_0 = 23/3,$$

$$m_1 = 1/\pi_1 = 69/12 \text{ y } m_2 = 1/\pi_2 = 69/48,$$